

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΑΑ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 7

Α2. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + \beta = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορεί να καταλήξει σε μία από τις περιπτώσεις της στήλης 3 του παρακάτω πίνακα ανάλογα με το τι είναι ο αριθμός α της στήλης 1 και ο αριθμός β της στήλης 2.

Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3
Α. $\alpha = 0$ Β. $\alpha \neq 0$	1. $\beta = 0$	(i) Μοναδική λύση
	2. $\beta \neq 0$	(ii) Αδύνατη
	3. $\beta \in \mathbb{R}$	(iii) Ταυτότητα

Συνδυάστε κατάλληλα ένα στοιχείο της στήλης 1 με ένα μόνο στοιχείο της στήλης 2 για να καταλήξουμε σε ένα μόνο συμπέρασμα της στήλης 3 το οποίο να ισχύει για όλες τις εξισώσεις της μορφής $ax + \beta = 0$.

Μονάδες 3

A3. Να μεταφέρετε συμπληρωμένες τις παρακάτω ισοδυναμίες ώστε να ισχύουν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(β) $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(γ) $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(δ) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Μονάδες 6

A4. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Για κάθε θετικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 > \alpha$ >>

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Αληθή ή Ψευδή δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

(β) Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

(γ) Αν $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ τότε $\alpha = \beta$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(δ) Αν οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι τότε ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

(ε) Αν $\alpha + \beta < 0$ τότε κατ'ανάγκη $\alpha < 0$ και $\beta < 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\kappa = |3 - \sqrt{17}| + |5 - \sqrt{17}| \quad \text{και} \quad \lambda = x^2 - (x-3)(x+3) \quad \text{όπου} \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 9$

Μονάδες 6

B2. Να λύσετε την εξίσωση $|x + \kappa| = \sqrt{\lambda}$

Μονάδες 6

B3. Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq \kappa + \sqrt{\lambda}$

Μονάδες 7

B4. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ αν $x \in [-1, 1]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί :

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1 - \sqrt{5}) + 5, \quad \beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

και η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 4| + 5$ όπου ο πραγματικός αριθμός x ανήκει στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $A = 2x$ και λύστε την εξίσωση $\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1}$

Μονάδες 8

Γ3. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x+2, y-1$ όπου $\alpha \leq x \leq \beta$ και $\alpha+1 \leq y \leq 2\beta$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περιμέτρος και το εμβαδόν του.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $x \in [\alpha, \beta]$ να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - |x - 4| + 5)^3 = -27$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^4 x - \lambda^3 = x - \lambda$ (1), όπου $x \in \mathbb{R}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός.

Δ1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση

(1) να είναι αδύνατη και ότι η μοναδική της λύση είναι η $x_0 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$

Μονάδες 8

Αν x_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και λ_1, λ_2 οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα τότε :

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|x_0| \leq \frac{1}{2}$

Μονάδες 5

Δ3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{5}$ και $\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^3 + 1}$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε την τιμή του x_0 αν ισχύει : $\lambda_2 + \sqrt{16x_0^2 + 8x_0 + 1} = 1 - |16x_0^2 - 1|$

Μονάδες 5